



انتقال حرارت ۱

مدرس: نفیسه بینش

فصل سوم:

هدایت پایدار یک بعدی

۱-۳: هدایت پایدار یک بعدی بدون چشمه حرارتی

✓ کارتزین

✓ استوانه ای

✓ کروی

۲-۳: هدایت پایدار یک بعدی با چشمه حرارتی

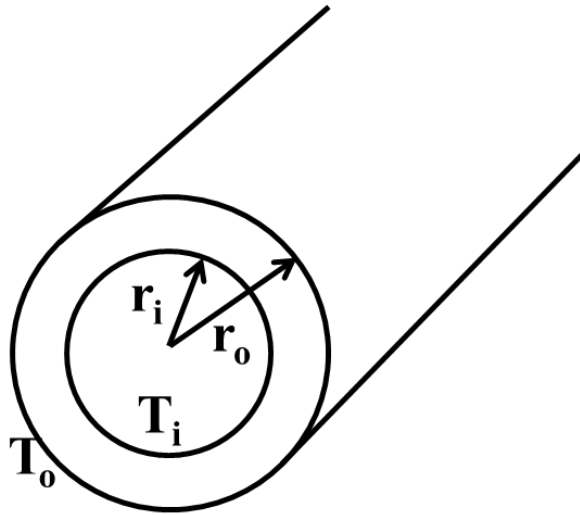
✓ کارتزین

✓ استوانه ای

✓ کروی

۳-۳: محاسبات پره ها

۳-۱: هدایت پایدار یک بعدی بدون چشمه حرارتی
۳-۱-۲: مختصات استوانه ای
الف) استوانه ساده توخالی



هدف:

۱. معادله توزیع دما در دیواره استوانه
۲. شدت حرارت منتقل شده

$$\cancel{\frac{1}{\alpha} \frac{dT}{dt}} = \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \cancel{\frac{q \cdot}{K}}$$

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = \frac{dT}{dr} + r\frac{d^2T}{dr^2} \xrightarrow{* 1/r} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} + \frac{d^2T}{dr^2} \quad (2)$$

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} + \frac{d^2T}{dr^2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0 \longrightarrow r\frac{dT}{dr} = C_1 \longrightarrow \frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r}$$

$$\longrightarrow dT = \frac{C_1}{r} dr \longrightarrow \int dT = \int \frac{C_1}{r} dr \longrightarrow \boxed{T = C_1 \ln r + C_2}$$

$$r=r_i \rightarrow T=T_i \rightarrow T_i=C_1 \ln r_i + C_2$$

$$r=r_o \rightarrow T=T_o \rightarrow T_o=C_1 \ln r_o + C_2$$

$$T_i=C_1 \ln r_i + C_2$$

$$-T_o=-C_1 \ln r_o - C_2$$

$$\longrightarrow T_i - T_o = C_1 \ln r_i - C_1 \ln r_o \longrightarrow T_i - T_o = C_1 \ln \frac{r_i}{r_o}$$

$$\longrightarrow \boxed{C_1 = \frac{T_i - T_o}{\ln \frac{r_i}{r_o}}}$$

$$T_i = C_1 \ln r_i + C_2 \longrightarrow T_i = \frac{T_i - T_o}{\ln \frac{r_i}{r_o}} \ln r_i + C_2$$

$$\longrightarrow \boxed{C_2 = T_i - \frac{T_i - T_o}{\ln \frac{r_i}{r_o}} \ln r_i}$$

$$T = \frac{T_i - T_o}{\ln \frac{r_i}{r_o}} \ln r + T_i - \frac{T_i - T_o}{\ln \frac{r_i}{r_o}} \ln r_i$$

$$T = \frac{T_i - T_o}{\ln \frac{r_i}{r_o}} (\ln r - \ln r_i) + T_i$$

$$T = T_i - \frac{T_i - T_o}{\ln \frac{r_o}{r_i}} \left(\ln \frac{r}{r_i} \right)$$

معادله توزيع دما

محاسبه شدت انتقال حرارت

$$q = -KA \frac{dT}{dr}$$

$$T = T_i - \frac{T_i - T_o}{\ln \frac{r_o}{r_i}} \left(\ln \frac{r}{r_i} \right) \longrightarrow \frac{dT}{dr} = - \frac{1}{r} \frac{T_i - T_o}{\ln \frac{r_o}{r_i}}$$

$$A = 2\pi rL$$

$$\longrightarrow q = -2K\pi rL \cdot \left(-\frac{1}{r} \frac{T_i - T_o}{\ln \frac{r_o}{r_i}} \right)$$

$$\longrightarrow q = 2K\pi L \cdot \left(\frac{T_i - T_o}{\ln \frac{r_o}{r_i}} \right) \longrightarrow$$

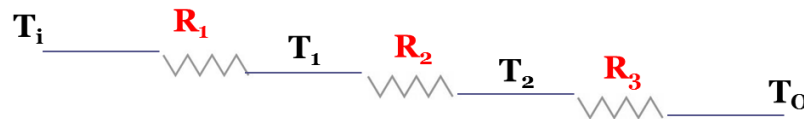
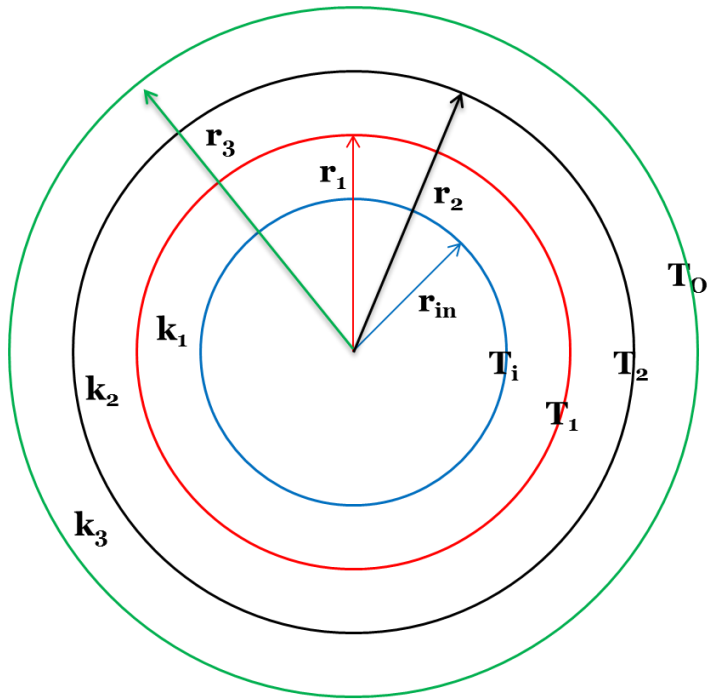
$$q = \frac{T_i - T_o}{(\ln \frac{r_o}{r_i}) / 2k\pi L}$$

$$q = \frac{T_i - T_o}{R} ; R = \frac{(\ln \frac{r_o}{r_i})}{2k\pi L}$$

شدت انتقال حرارت

ب) دیواره های مرکب استوانه ای:

لوله ای که دمای سطح آن T_i و شعاع آن r_i است، با چندین لایه عایق که شعاع آنها به ترتیب r_1, r_2, \dots, r_n و ضریب هدایت هر کدام به ترتیب k_1, k_2, \dots, k_n است، پوشانده شده است. حال میخواهیم حرارت منتقل شده و دمای سطح مشترک لایه های عایق را محاسبه کنیم.



$$q_t = \frac{T_i - T_o}{R_t}$$

$$R_t = R_1 + R_2 + R_3$$

$$R_1 = \frac{\ln \frac{r_1}{r_i}}{2k_1\pi L}$$

$$R_2 = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2k_2\pi L}$$

$$R_3 = \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{2k_3\pi L}$$

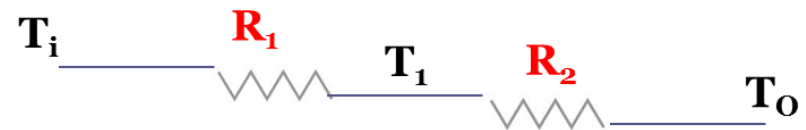
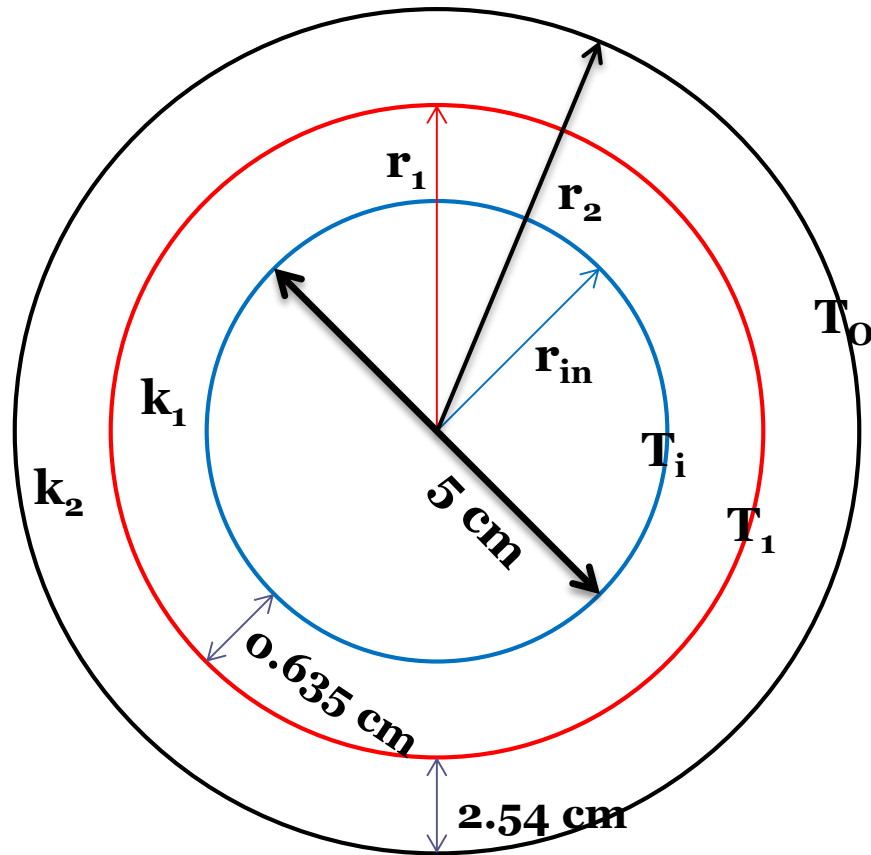
- مثال: یک لوله فولادی که قطر داخلی آن ۵ cm است به وسیله یک لایه از پنبه نسوز با ضخامت ۰/۶۳۵ cm و یک لایه الیاف شیشه به ضخامت ۲/۵۴ cm عایق بندی شده است. دمای سطح لوله ثابت و برابر با ۳۱۵/۵ °C و دمای سطح بیرونی آخرین لایه برابر با ۳۸ °C می باشد. شدت حرارت اتلاف شده و دمای سطح تماس پنبه نسوز و الیاف شیشه را به دست آورید.

اطلاعات داده شده:

(پنبه نسوز): $k_1 = 0.17 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$

(الیاف شیشه): $k_2 = 0.05 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$

حل: مساله را به ازای ۱ متر از طول لوله حل می کنیم.



$$r_i = 2.5 \text{ cm} \quad r_1 = 2.5 + 0.635 = 3.135 \text{ cm}$$

$$r_2 = 3.135 + 2.54 = 5.675 \text{ cm}$$

$$R_1 = \frac{\ln \frac{r_1}{r_i}}{2\pi l k_1} = \frac{\ln 3.135 / 2.5}{2\pi * 1 * 0.17} = 0.212 \text{ } ^\circ\text{C}/\text{W}$$

$$R_2 = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi l k_2} = \frac{\ln 5.675 / 3.135}{2\pi * 1 * 0.05} = 1.9 \text{ } ^\circ\text{C}/\text{W}$$

$$\Rightarrow q = \frac{T_i - T_o}{R_1 + R_2} = \frac{315.5 - 38}{0.212 + 1.9} = 131.4 \text{ W}$$

$$q = \frac{T_i - T_1}{R_1} \Rightarrow T_1 = T_i - R_1 \cdot q = 315.5 - 0.212 * 131.4 = 287.64 \text{ } ^\circ\text{C}$$